

# 基于协方差矩阵加权的非理想情况下 自适应阵列干扰自由度估计

伍 勇, 汤 俊, 彭应宁

(清华大学电子工程系, 北京 100084)

**摘 要:** 在均匀线阵条件下, 证明了干扰特征值渐近为周期延拓后的干扰空间谱这一性质. 据此提出了一种非理想情况下估计干扰自由度, 即大干扰特征值个数的方法. 该方法首先利用协方差矩阵加权得到非理想情况下的干扰协方差函数和对应的空间谱, 然后根据周期延拓后的干扰空间谱估计干扰自由度. 仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词:** 干扰抑制; 协方差矩阵加权; 干扰自由度

**中图分类号:** TN973. 3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372 2112 (2008) 06 1231-04

## On Estimate of Interference Degrees of Freedom of Adaptive Array in Non-Ideal Scenarios Based on Covariance Matrix Tapers

WU Yong, TANG Jun, PENG Ying-ning

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** In the case of uniform linear array (ULA) system, it is found that the interference eigenvalue asymptotes to the periodically extended version of the interference spatial spectrum. This fact was then employed in estimation on the number of interference degrees of freedom (DoF), i. e., the number of significant interference eigenvalues, in the presence of various non-ideal effects. The proposed method first employs covariance matrix tapers to obtain the interference covariance function and its corresponding spatial spectrum in non-ideal scenarios. Then the number of interference DoF is estimated according to the periodically extended spectrum. The simulations agree with the estimation results.

**Key words:** interference rejection; covariance matrix tapers (CMT); interference degrees of freedom

### 1 引言

在自适应波束形成(ABF)和杂波抑制系统中, 干扰自由度(即干扰协方差矩阵中远大于噪声功率的特征值个数)是系统设计者首要关注的问题<sup>[1]</sup>. 干扰自由度越大, 系统抗干扰性能越差<sup>[2]</sup>, 所需的训练样本通常也越多<sup>[2]</sup>.

在传统的窄带 ABF 应用中, 通常认为干扰自由度等于离散干扰源数目. 而对于分布式干扰源(如地杂波), 理想情况下也可根据 Brennan 准则<sup>[1]</sup>进行估计. 然而, 受许多非理想因素的影响, 如通道幅相误差、阵元抖动及信号带宽影响等, 系统的干扰自由度将有所增加<sup>[1, 3, 4]</sup>. 但目前尚无文献给出非理想情况下的干扰自由度估计方法. 事实上, 许多非理想因素影响下的干扰协方差矩阵  $R$  均可表示为理想情况下的协方差矩阵  $R_I$  与非理想因素形成的矩阵  $T$  的 Hadamard 积(即矩阵各元素对应相乘)<sup>[3, 4]</sup>. 这被称为协方差矩阵加权(CMT).

本文基于 CMT 模型, 把在连续观测条件下得到的带限信号特征值渐近特性<sup>[5]</sup>用于均匀线阵, 给出了一种适用于非理想情况下的干扰自由度估计方法.

为便于说明, 本文仅考虑线阵的空域干扰自由度估计, 而暂不涉及空时二维自适应处理(STAP)和平面、立体阵列. 后者是多维采样过程, 将在以后讨论. 本文首先简述 CMT 模型. 然后介绍非理想情况下的干扰自由度估计方法. 最后利用这一方法考察信号带宽影响下的干扰自由度, 并给出相应的仿真结果.

### 2 基于 CMT 的干扰协方差矩阵模型

非理想情况下, 干扰协方差矩阵可表示为<sup>[3]</sup>

$$R = \sum_{q=1}^Q R_I(\theta_q) \odot T(\theta_q) \quad (1)$$

其中  $Q$  是干扰散射体数目,  $T(\theta_q)$  是在到达角  $\theta_q$  方向上由非理想因素形成的加权矩阵,  $R_I(\theta_q)$  是第  $q$  个干扰散射体在理想情况下的协方差矩阵,

$$\mathbf{R}_I(\theta_q) = P_q \mathbf{v}(\theta_q) \mathbf{v}(\theta_q)^H \quad (2)$$

$P_q$  是第  $q$  个干扰散射体的反射功率,  $\mathbf{v}(\theta_q)$  是阵列导引矢量, ‘ $\odot$ ’ 代表 Hadamard 积. 在线阵中,

$$\mathbf{v}(\theta_q) = [\exp(j2\pi f p_1), \exp(j2\pi f p_2), \dots, \exp(j2\pi f p_M)]^T \quad (3)$$

其中

$$f_q = \cos \theta_q / \lambda \quad (4)$$

是由到达角  $\theta_q$  确定的空间频率,  $p_m$  是第  $m$  个阵元的位置,  $M$  为阵元数. 式(1)也适用于分布式干扰源, 此时将其看作由很多个干扰散射体组成即可.

许多非理想情况下的干扰协方差矩阵都可用 CMT 模型来描述<sup>[3]</sup>, 比如接收通道存在幅相误差、基带信号的带宽影响等<sup>[3]</sup>. 值得注意的是, 在这些情况中, 加权矩阵  $\mathbf{T}(\theta_q)$  中的元素仅与阵元位置差有关<sup>[3]</sup>. 如考虑信号带宽时, 加权矩阵  $\mathbf{T}(\theta_q)$  中第  $m$  行第  $n$  列的元素为<sup>[3]</sup>

$$\left[ \mathbf{T}(\theta_q) \right]_{m,n} = r_s \left[ \frac{(p_m - p_n) \cos \theta_q}{c} \right] = r_{T,q}(p_m - p_n) \quad (5)$$

其中  $r_s(\tau)$  是基带信号的时间自相关函数.

### 3 非理想情况下干扰自由度估计

由于理想情况下干扰过程通常是平稳的, 故  $\mathbf{R}_I(\theta_q)$  中的元素也仅与阵元位置差有关. 于是可将  $\mathbf{T}(\theta_q)$  和  $\mathbf{R}_I(\theta_q)$  的元素分别记为

$$\left[ \mathbf{T}(\theta_q) \right]_{m,n} = r_{T,q}(p_m - p_n) \quad (6)$$

$$\left[ \mathbf{R}_I(\theta_q) \right]_{m,n} = r_{I,q}(p_m - p_n) \quad (7)$$

根据式(1), 干扰协方差矩阵的元素  $(\mathbf{R})_{m,n}$  也仅与阵元位置差有关,

$$(\mathbf{R})_{m,n} = r(p_m - p_n) = \sum_{q=1}^Q r_{I,q}(p_m - p_n) r_{T,q}(p_m - p_n) \quad (8)$$

其中,  $r(p)$  被称为干扰协方差函数.  $\mathbf{R}$  可看作是对  $r(p)$  采样得到的. 类似的,  $\mathbf{R}$  的第  $i$  个特征向量  $\mathbf{u}_i$  可看作是对某个连续函数  $u_i(p)$  采样得到的, 即  $\mathbf{u}_i$  的第  $m$  个元素  $(\mathbf{u}_i)_m = u_i(p_m)$ . 于是  $\mathbf{R}$  的第  $i$  个特征向量及对应的特征值  $\lambda$  满足

$$\lambda u_i(p_m) = \sum_{n=1}^M r(p_m - p_n) u_i(p_n) \quad (9)$$

估计干扰自由度就是估计满足上式的大特征值的个数. 故估算  $\lambda_i$  的值是必要的.

连续观测时(即用连续孔径代替线阵), 式(9)可写作积分形式

$$\lambda u_i(p) = \int_0^L r(p-q) u_i(q) dq \quad (10)$$

其中  $p$  和  $q$  是连续孔径上某一点的位置,  $L$  是孔径长度. Newsam 等人研究了满足式(10)的特征值的渐近分

布<sup>[5]</sup>. 注意到, 式(10)中的积分核(即干扰协方差函数  $r$ ) 仅与位置差  $(p-q)$  有关, 即这是一个单变量函数. 故积分核  $r$  有一维频谱

$$P_r(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\rho) e^{-j2\pi f \rho} d\rho \quad (11)$$

在 ABF 应用中,  $f$  是由式(4)确定的空间频率, 故本文也将  $P_r(f)$  称为  $r$  的空间谱. Newsam 等人指出, 满足式(10)的特征值  $\lambda$  与积分核的空间谱  $P_r(f)$  有关. 当观测区间(即孔径长度  $L$ )很大时,  $\lambda_i$  渐近为  $P_r(i/L)$  ( $i$  为整数,  $-\infty < i < +\infty$ )<sup>[5]</sup>. 这就是所谓的带限信号特征值渐近特性. 根据这一性质, 可将积分核的空间谱划分为多个长度为  $1/L$  的区间段. 每个区间段内  $P_r(f)$  的取值代表了某个特征值的渐近值. 故考察各区间段  $P_r(f)$  的取值就可得到对大特征值个数的估计. 需要强调的是, Newsam 的结论是在连续观测及积分核为单变量函数的条件下得到的.

采用阵列观测时, 干扰特征值  $\lambda_i$  由式(9)确定. 下面证明, 若阵元是均匀排布的, 则式(9)仍可表达为连续积分的形式, 且此时的积分核仍仅与位置差  $(p-q)$  有关, 故可继续利用 Newsam 的结论来估算  $\lambda_i$  的值, 并由此估计大特征值个数, 即干扰自由度.

假设均匀线阵中第  $m$  个阵元的位置为  $p_m = (m-1)d$ , 其中  $d$  为阵元间距. 令  $p_m = p$ , 则式(9)可写作

$$\begin{aligned} \lambda u_i(p) &= \sum_{n=1}^M r(p-p_n) u_i(p_n), p \in \{p_1, p_2, \dots, p_M\} \\ &= \int_{-d/2}^{L-d/2} [r(p-q) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[(p-q) - (p-p_n')] ] \\ &\quad \cdot u_i(q) dq \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $L = Md$ ,  $p_n' = (n-1)d$  ( $-\infty < n < +\infty$ ).  $L$  的大小和式(12)的积分上下限是根据均匀线阵与连续孔径间的等效关系得到的<sup>[6]</sup>. 记式(12)的积分核为  $r'$ , 即

$$r'(p, p) = r(p) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[(p) - (p-p_n')] \quad (13)$$

其中  $p = p - q$ . 注意到  $p = p_m = (m-1)d$ , 故式(13)可进一步写作

$$r'(p, p) = r'(p) = r(p) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(p - n'd) \quad (14)$$

其中  $n' = m - n$ . 由式(14)可知, 采用均匀线阵时, 积分核  $r'$  仍仅与  $p$  有关. 故  $r'$  具有一维空间谱  $P_{r'}(f)$ . 于是根据带限信号特征值渐近特性, 当  $L$  很大时, 第  $i$  个干扰特征值  $\lambda_i$  渐近为  $P_{r'}(i/L)$ . 根据式(14),  $r'$  是对  $r$  的采样, 采样周期为  $d$ , 故由采样定理可知,  $P_{r'}(f)$  由  $r$  的空间谱  $P_r(f)$  周期延拓得到, 延拓量为  $1/d$ . 根据傅立叶级数理论,  $r'(p)$  由  $P_{r'}(f)$  在  $|f| \leq 1/(2d)$  的部分完全确定, 即

$$r'(p) = \int_{-1/(2d)}^{1/(2d)} P_{r'}(f) e^{j2\pi f p} df \quad (15)$$

这表明,  $r'(\rho)$  可看作一个带限过程, 其空间谱仅分布在  $[-1/(2d), 1/(2d)]$  上. 故干扰自由度的估计方法是, 以  $(1/L)$  为间隔将区间  $[-1/(2d), 1/(2d)]$  分作  $M$  段, 一旦  $P_r(f)$  在某个区间段内存在大于噪声功率的值, 则认为该区间段贡献一个干扰自由度. 若阵元间距较大, 干扰空间谱  $P_r(f)$  经周期延拓后可能产生混叠. 这时  $P_r(f)$  在区间  $[-1/(2d), 1/(2d)]$  上的分布将远大于  $P_r(f)$ , 从而导致干扰自由度上升, 甚至满秩.

采用 CMT 建模给获得非理想条件下的  $P_r(f)$  带来了方便. 由式(8)可知, 非理想条件下的干扰协方差函数  $r$  由各方向理想情况下的协方差函数  $r_{l,q}(\rho)$  和该方向上非理想因素形成的协方差函数  $r_{T,q}(\rho)$  的乘积得到. 故干扰空间谱  $P_r(f)$  是  $r_{l,q}(\rho)$  和  $r_{T,q}(\rho)$  的空间谱  $P_{l,q}(f)$  和  $P_{T,q}(f)$  的卷积. 经卷积运算后, 各方向的干扰空间谱较之理想情况有所展宽, 展宽程度由  $P_{T,q}(f)$  的宽度决定. 根据渐近特性可知, 此时原理想情况下的某些小特征值将增大, 于是出现所谓干扰子空间泄漏 (Subspace Leakage) 现象<sup>[4]</sup>, 干扰自由度上升.

#### 4 信号带宽对干扰自由度的影响

##### 4.1 干扰空间谱的展宽分析

信号带宽影响是常见的非理想因素之一. 由第 3 节的分析可知, 此时干扰空间谱将被展宽, 展宽程度由  $P_{T,q}(f)$  确定. 下面考察  $P_{T,q}(f)$ . 此时  $r_{T,q}(\rho)$  与基带信号的时间自相关函数  $r_s(\tau)$  有关<sup>[5]</sup>. 通常,  $r_s(\tau)$  是带限的, 即

$$r_s(\tau) = \int_{-B/2}^{B/2} P_s(f_s) e^{j2\pi f_s \tau} df_s \quad (16)$$

其中  $B_s$  是基带信号带宽,  $P_s(f_s)$  是定义在信号频率  $f_s$  上的功率谱密度. 于是

$$r_{T,q} = r_s \left\{ \rho \cos \theta_q / c \right\} = \int_{-B/2}^{B/2} P'(f) \exp(j2\pi f \rho) df \quad (17)$$

其中  $f = (\cos \theta_q / c) f_s = \cos \theta_q / \lambda$  为空间频率 ( $\lambda = c / f_s$  为基带信号的“波长”),  $P'(f) = P_s \left\{ \frac{c}{\cos \theta_q} f \right\} \left| \frac{c}{\cos \theta_q} \right|$  为定义在空间频率  $f$  上的基带信号功率谱密度,  $B = B_s |\cos \theta_q| / c$  为空间频率带宽. 根据式(11)和(17)可得

$$P_{T,q}(f) = \begin{cases} P'(f) & |f| \leq B/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

可见, 考虑基带信号带宽后, 来自  $\theta_q$  方向的干扰空间谱的带宽将由 0 扩展到  $B = B_s |\cos \theta_q| / c$ .

##### 4.2 仿真结果

本小节给出考虑信号带宽影响后干扰自由度估计的仿真结果. 系统参数为: 阵元数目  $M = 48$ , 工作波长  $\lambda$

$= 0.3\text{m}$ , 基带信号带宽  $B_s = 100\text{MHz}$ , 基带信号时间自相关函数为

$$r_s(\tau) = \text{sinc}(B_s \tau) = \sin(\pi B_s \tau) / (\pi B_s \tau) \quad (19)$$

干扰环境包括两个位于  $\theta_1 = 29^\circ$  和  $\theta_2 = 70^\circ$  的离散干扰源及一个分布在  $\theta = 110^\circ \sim 115^\circ$  上的分布式干扰源 (对应的空间频率分别为  $f_{s1} = 2.92/\text{m}$ ,  $f_{s2} = 1.14/\text{m}$  以及  $f_s = -1.41 \sim -1.14/\text{m}$ ). 各干扰源的干扰噪声比 (INR) 均为 20dB (分布式干扰源各到达角 INR 均为 20dB). 考虑两种阵列: (1) 均匀密集阵, 即阵元间距  $d_1 = \lambda/2$ ; (2) 均匀稀疏阵, 阵元间距为  $d_2 = 3\lambda$ . 干扰协方差矩阵由式(1)给出, 其中  $T(\theta_q)$  由式(5)给出.

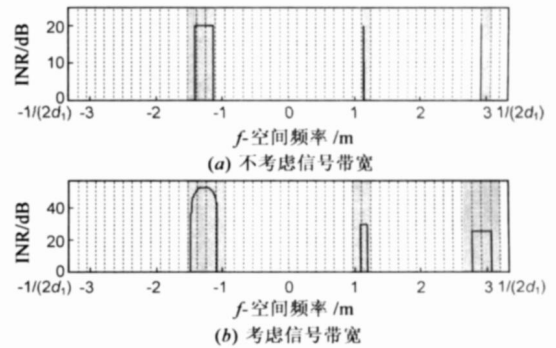


图 1  $P_r(f)$  和密集阵的  $P'_r(f)$

考虑信号带宽影响前后的干扰空间谱  $P_r(f)$  分别如图 1(a) 和 (b) 所示. 根据式(18), 考虑信号带宽后, 三个干扰源的空间谱分别扩展到 2.77~ 3.06/m, 1.08~ 1.19/m, 和 -1.47~ -1.08/m. 由均匀阵列采样后, 干扰空间谱  $P_r(f)$  作周期延拓即得  $P'_r(f)$ . 密集阵和稀疏阵在区间  $[-1/(2d_1), 1/(2d_1)]$  和  $[-1/(2d_2), 1/(2d_2)]$  上的  $P'_r(f)$  分别如图 1 和图 2 所示. 由于密集阵不存在频谱混叠, 故  $P'_r(f)$  在  $[-1/(2d_1), 1/(2d_1)]$  上与  $P_r(f)$  相同. 而由图 2 可知, 此时的稀疏阵发生了频谱混叠. 考察  $P'_r(f)$  取值大于噪声功率 (0dB) 的区间段数目即得到对干扰自由度的估计. 这些区间段用灰色标注在图 1 和图 2 中. 图 3 绘制了考虑信号带宽前后密集阵和稀疏阵的干扰特征谱. 特征谱的“拐点”对应着实际的大特征值个数 (即实际的干扰自由度). 为了比较估计结果与拐点的

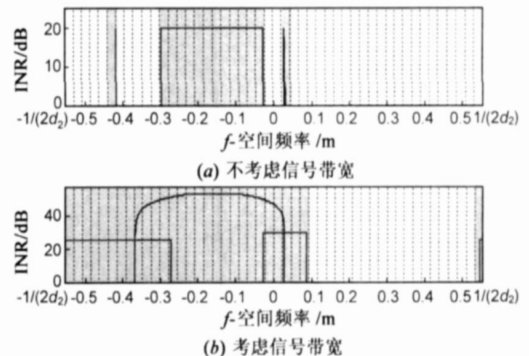
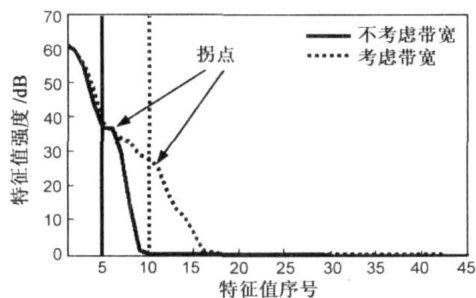
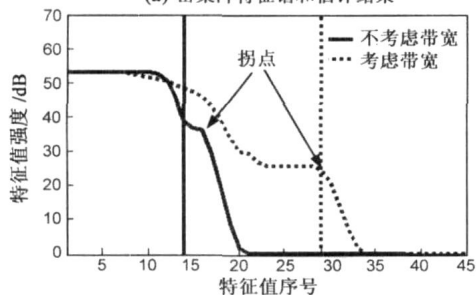


图 2 稀疏阵的  $P_r(f)$

差异程度, 将估计结果用竖线标注在图 3 中. 可见, 本文提出的估计方法能比较准确地预报特征谱的拐点, 即比较准确地给出干扰自由度. 但也注意到, 估计结果存在一定误差. 这是由于本文使用的是特征值的渐近特性, 故要求较大的阵列规模. 当阵列规模增大后, 估计性能将进一步改善.



(a) 密集阵特征谱和估计结果



(b) 稀疏阵特征谱和估计结果

图 3 特征谱和估计结果

## 5 结论

本文基于 CMT 提出了一种适用于非理想条件下自适应阵列干扰自由度的估计方法. 该方法首先用 CMT 模型得到各种非理想因素下的干扰协方差矩阵和对应的干扰空间谱, 然后利用干扰特征值渐近为周期延拓后的干扰空间谱这一性质估计干扰自由度. 该方法可扩展到对非理想情况下 STAP 雷达的杂波自由度的估计中.

## 参考文献:

- [1] Ward J. Space Time Adaptive Processing for Airborne Radar [R]. Lexington: Lincoln Laboratory, 1994.
- [2] Guerci J R, Goldstein J S, Reed I S. Optimal and adaptive reduced rank STAP [J]. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2000, 36(2): 647- 663.
- [3] Guerci J R. Space Time Adaptive Processing [M]. Boston: Artech House, 2003. 94.
- [4] Guerci J R, Bergin J S. Principal components, covariance matrix tapers, and the subspace leakage problem [J]. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2002, 38(1): 152- 162.
- [5] Newsam G, Barakat R. Essential dimension as a well defined number of degrees of freedom of finite convolution operators appearing in optics [J]. J Opt Soc Am A, 1985, 2(11): 2040- 2045.
- [6] Van Trees H L. Optimum Array Processing [M]. New York: John Wiley & Sons, 2002. 71- 74.

## 作者简介:



伍 勇 男, 1980 年 3 月出生于重庆市. 博士. 主要研究方向为杂波抑制和阵列信号处理.  
E mail: wuyong03@mails.tsinghua.edu.cn

汤 俊 男, 1973 年生于江苏省南京市. 现为清华大学电子工程系副教授, 从事阵列信号处理、雷达目标检测等方面的研究.  
E mail: tangjue@mail.tsinghua.edu.cn

彭应宁 男, 1939 年生. 现为清华大学电子工程系教授、博士生导师. 长期从事雷达信号处理领域的研究, 获国家级和部委级科技进步奖十余项. 在国内外发表学术论文近 200 篇, 出版专著 4 部.  
E mail: ynpeng@mail.tsinghua.edu.cn